



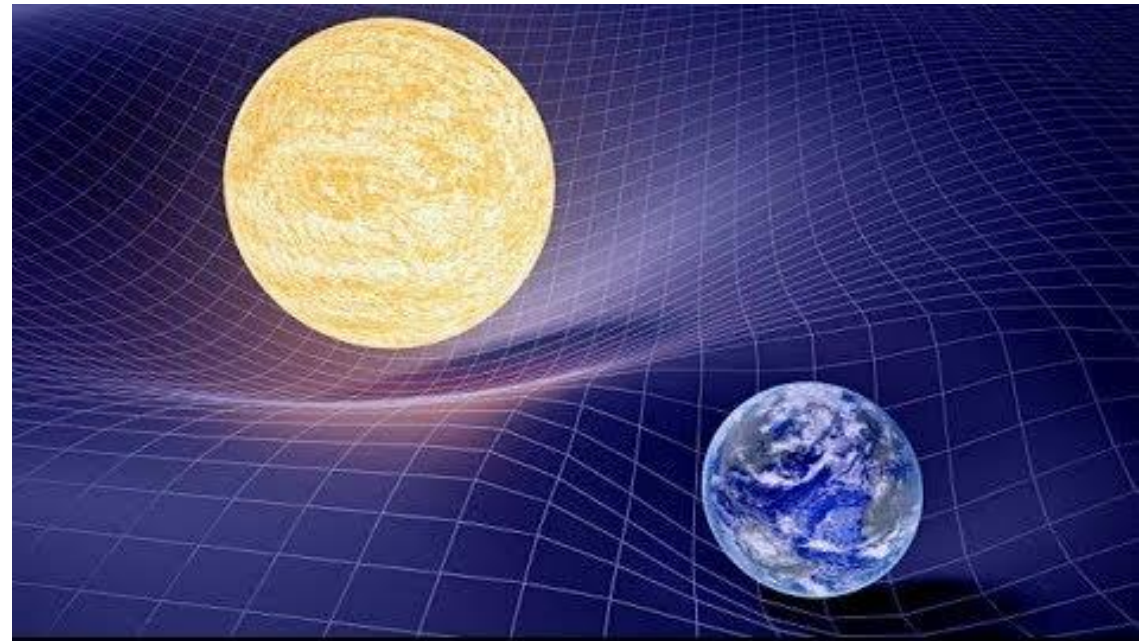
Cours 21 – 27/11/2024

9. Moment cinétique; Force de gravitation; Satellites

9.2. Force de gravitation

9.3. Energie potentielle effective

9.4. Satellites artificiels



9.2. Force de gravitation



■ Energie potentielle

Force de gravitation : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$

Calcul de la variation l'énergie potentielle entre un point à l'infini (A) et un point à la distance R (B) :

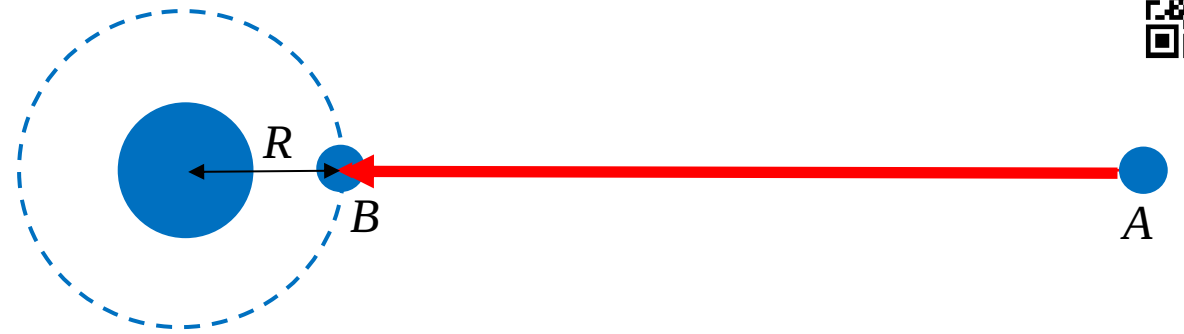
$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_\infty^R -G \frac{mM}{r^2} dr = \left[G \frac{mM}{r} \right]_\infty^R = G \frac{mM}{R} = [E_p(A) - E_p(B)]$$

$$[E_p(A) - E_p(B)] = [E_p(\infty) - E_p(R)] = G \frac{Mm}{R} \Rightarrow E_p(R) = -G \frac{Mm}{R} + E_p(\infty)$$

On pose $E_p(\infty) = 0$ car l'énergie potentielle est définie à une constante près

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

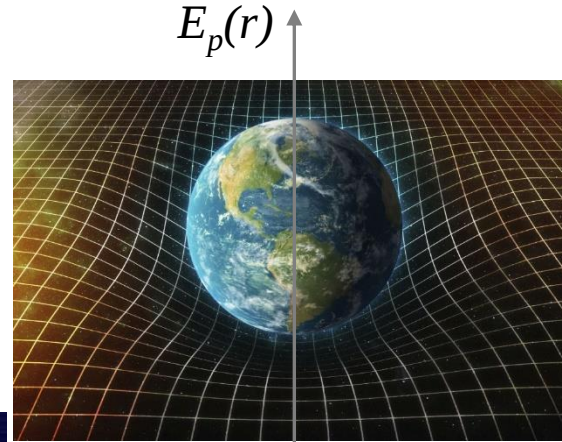
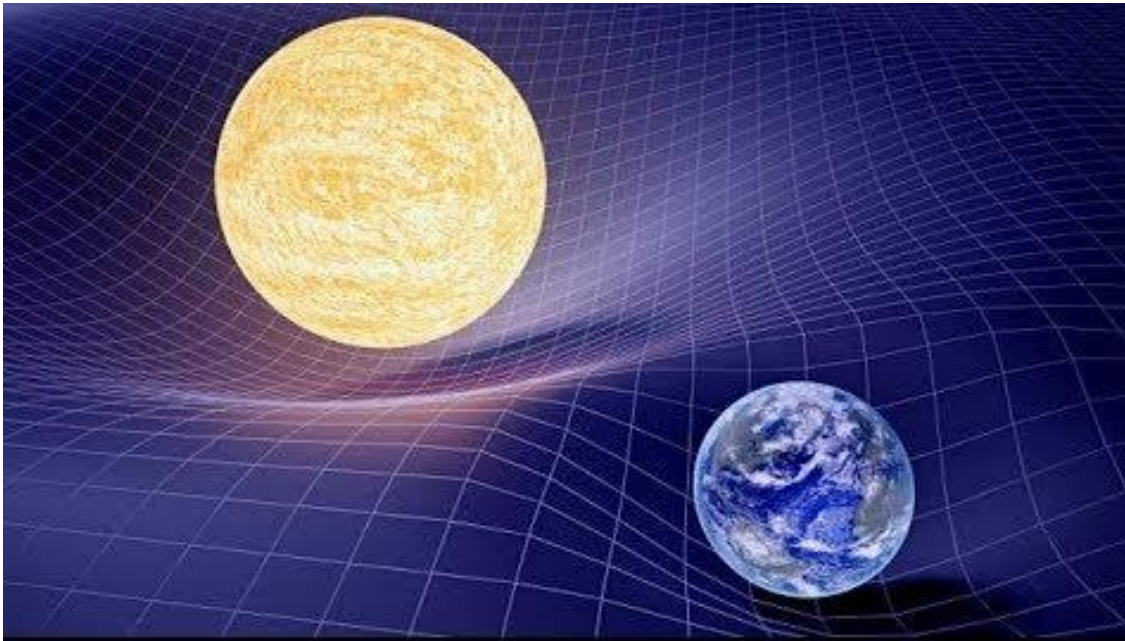
Energie potentielle gravitationnelle



9.2. Force de gravitation

■ Énergie potentielle

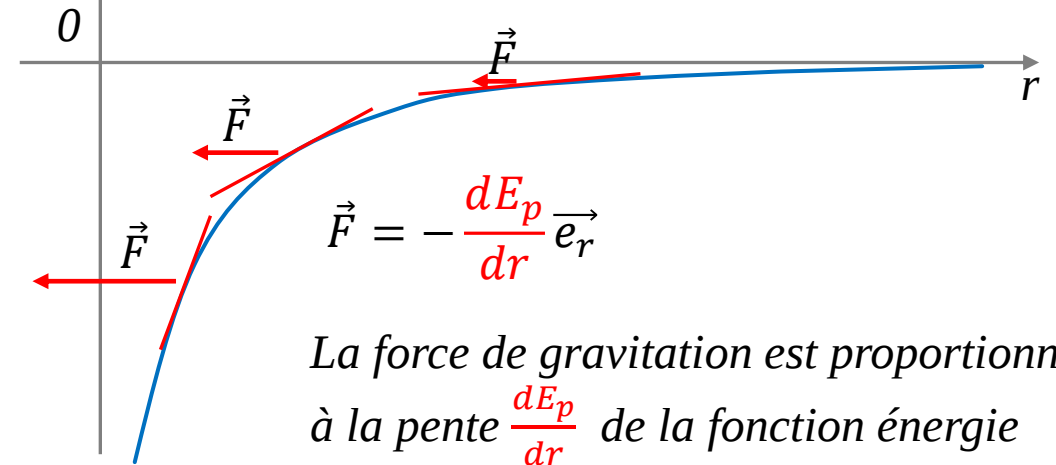
$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$



On peut remarquer que

$$\frac{dE_p}{dr} = G \frac{Mm}{r^2} = F$$

$$\text{soit } \vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$$



La force de gravitation est proportionnelle à la pente $\frac{dE_p}{dr}$ de la fonction énergie potentielle au signe moins près.



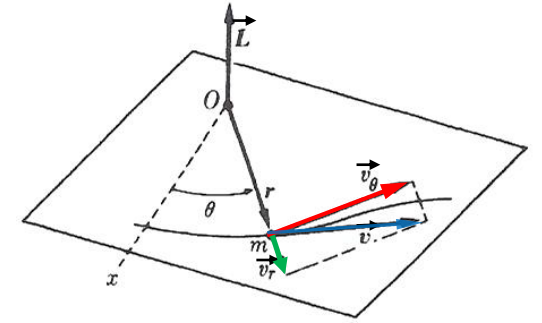
9.2. Force de gravitation



■ Energie cinétique

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{avec} \quad \vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$$
$$\text{soit } v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$\text{d'où } E_c(r) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$



Le moment cinétique L est donné par $L = m r^2 \omega = m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$

$$\text{soit } L^2 = (m r^2 \omega)^2 = m^2 r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \Rightarrow \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

Finalement :

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2 m r^2}$$

variation
"radiale" de E_c

variation
"orbitale" de E_c

avec $L = \text{cte}$ car mouvement
à force centrale.



9.2. Force de gravitation

■ Energie cinétique – trajectoire circulaire

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Trajectoire circulaire : $r = cte$ ($\dot{r} = 0$)

$$E_c(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$$

Relation entre énergie cinétique et énergie potentielle pour une trajectoire circulaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \frac{GMm}{r^2} \\ a = \frac{v^2}{r} = \frac{F}{m} \end{array} \right. \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \quad d'où \quad E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

$$or \quad E_p(r) = -\frac{GMm}{r} \quad soit \quad E_c(r) = -\frac{1}{2} E_p(r)$$

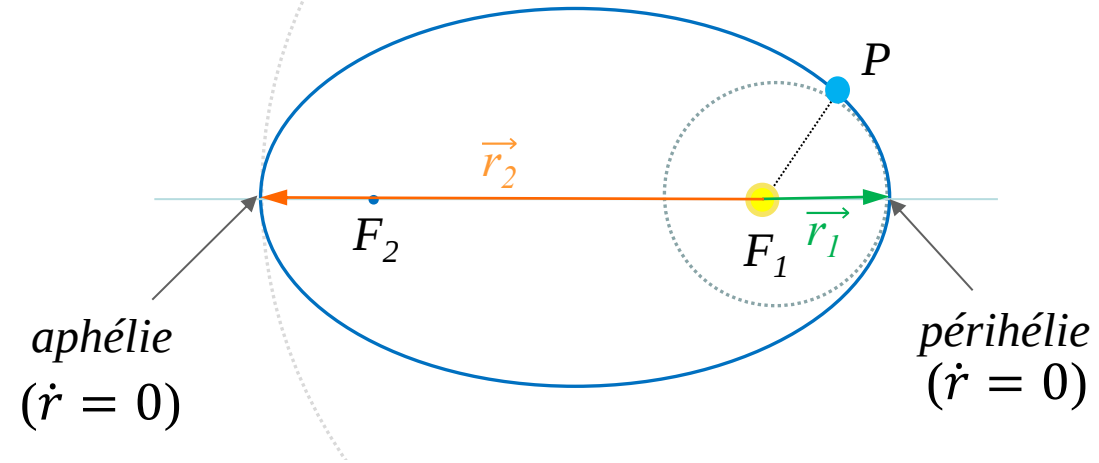
pour une trajectoire circulaire uniquement



9.2. Force de gravitation

■ Energie cinétique – trajectoire elliptique

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$



Au cours d'une révolution (tour complet), la distance $r(t)$ du point P par rapport à l'un des foyers présente deux extrema :

- un maximum à une position appelée “aphélie” pour une planète, “apogée” pour un satellite/Lune
- un minimum à une position appelée “périhélie” pour une planète, “périgée” pour un satellite/Lune

Pour ces extrema : $\dot{r} = 0$ soit $E_c(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$ $\xrightarrow{L = \text{cte}}$ la vitesse est **maximum** à la **périhélie** et **minimum** à l'**aphélie**
périgée **apogée**

9.2. Force de gravitation



■ Energie potentielle

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

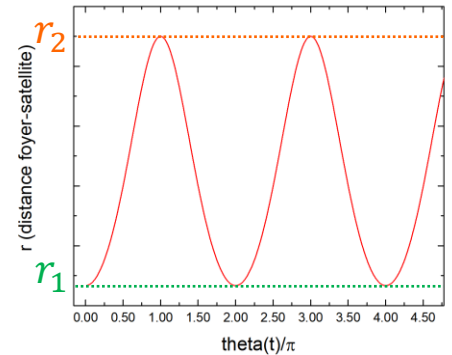
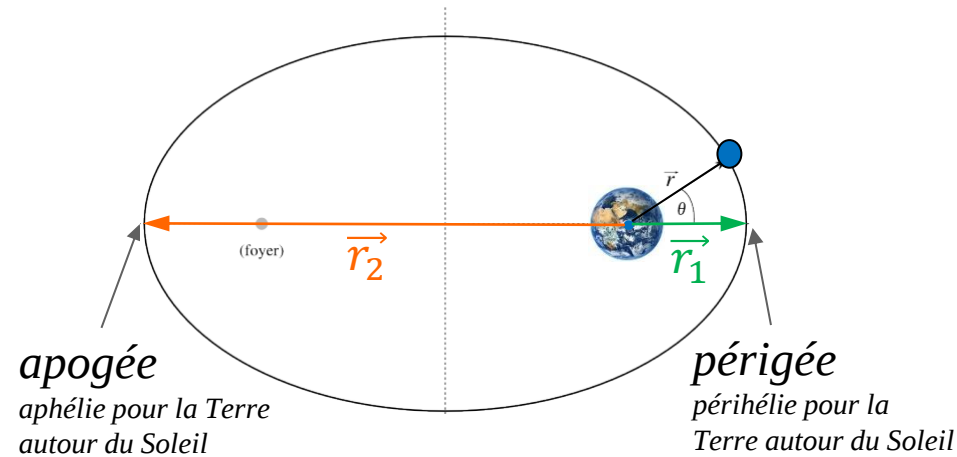
Energie potentielle gravitationnelle. On remarque que $E_p(\infty)=0$

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

Force de gravitation

■ Energie cinétique

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$



■ Moment cinétique

$L = cte$ car la force de gravitation est une force centrale

$L = mrv$ aux extrema de la trajectoire car $\vec{r} \perp \vec{v}$

9.3. Energie potentielle effective



■ Energie mécanique

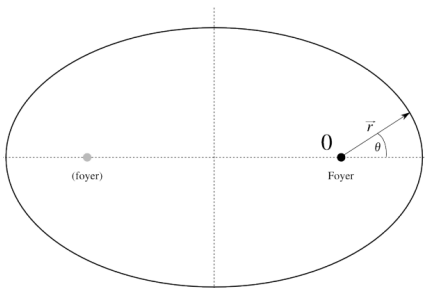
$$E(r) = E_c + E_p = cte$$

$$E(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} + k$$

k est une constante. Par convention, on pose $k=0$. Par conséquent, l'énergie mécanique est négative lorsque la masse m est en orbite ou tombe sur la masse M .
Et $E(r) \geq 0$ correspond à la masse m qui quitte le champ de gravitation.

$$\text{avec } E_c(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

On peut donc écrire $E(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} \right]$



Vitesse radiale

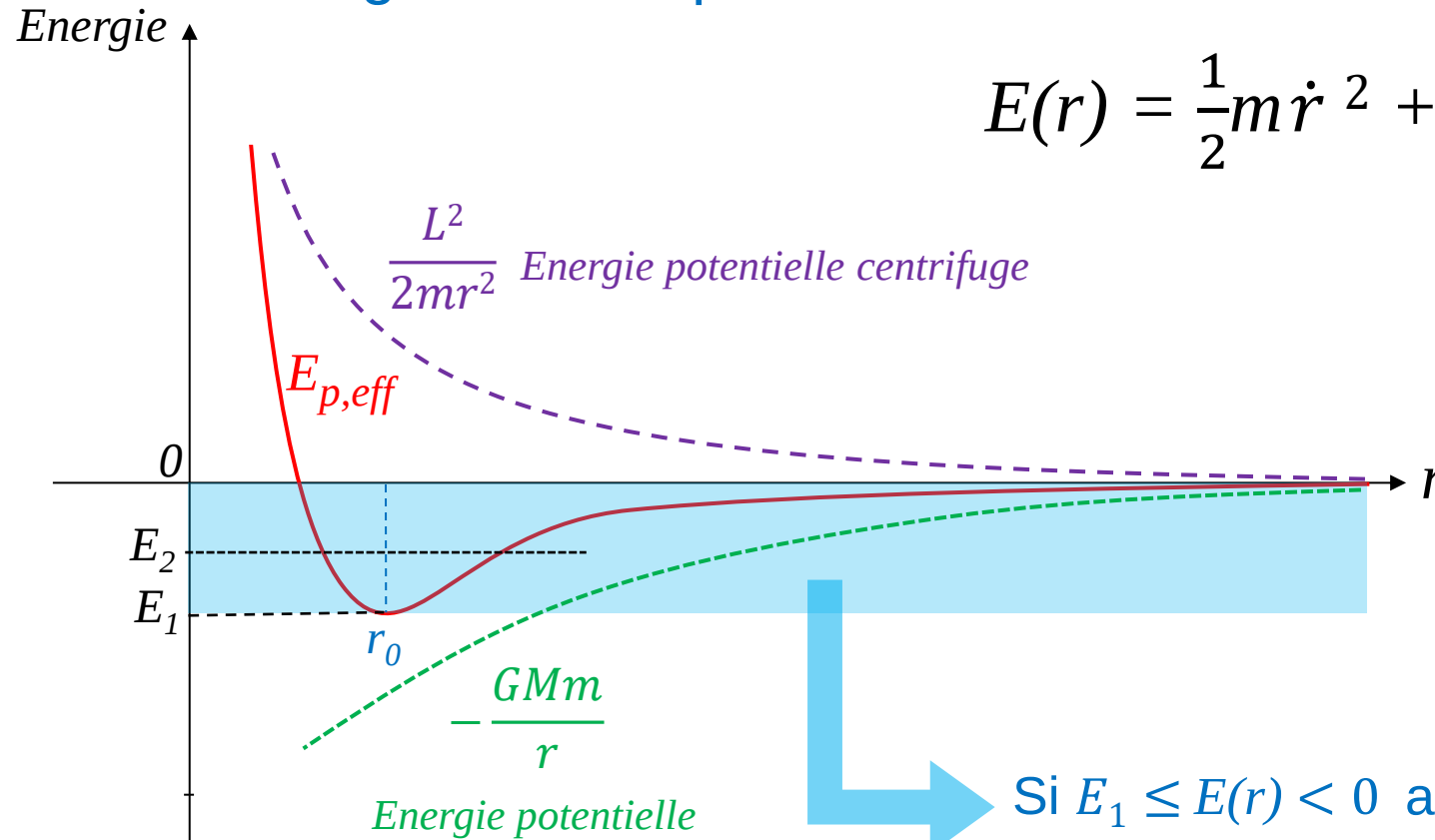
on appelle ce terme énergie potentielle effective, $E_{p,eff}$

$\dot{r} = 0$ à l'aphélie/apogée et à la périhélie/périgée (car rayon passe par un extremum)
ou $\dot{r} = 0$ pour un mouvement circulaire



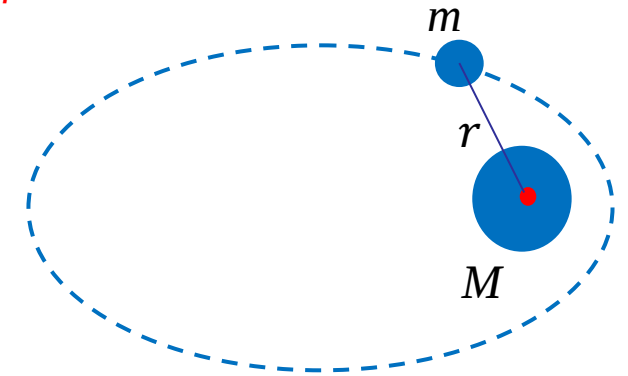
9.3. Energie potentielle effective

■ Energie mécanique



$$E(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \boxed{\frac{L^2}{2mr^2}} - \boxed{\frac{GmM}{r}} = cte$$

$E_{p,eff}$

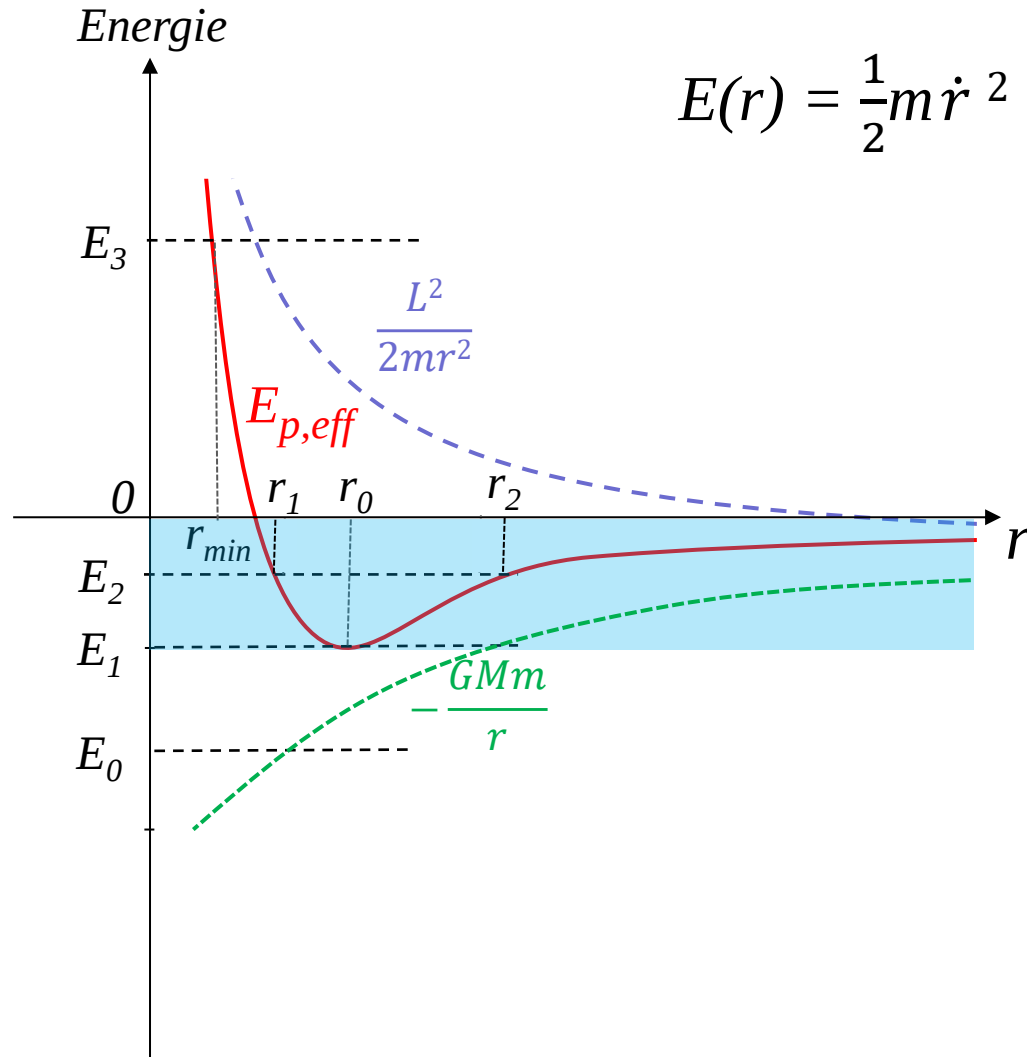


- Pour une orbite d'énergie E_2 , la trajectoire est une ellipse.
- Pour une orbite d'énergie E_1 la trajectoire est un cercle de rayon r_0 .

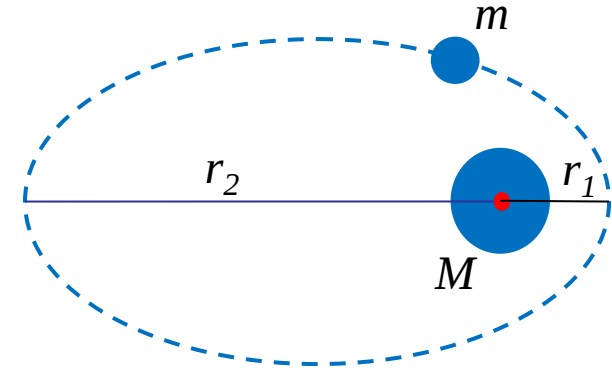
9.3. Energie potentielle effective



■ Energie mécanique et trajectoire



$$E(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}}_{E_{p,eff}} = cte$$



Trajectoire en fonction de l'énergie mécanique

$E_0 < E_1$: pas d'orbite possible. L'objet chute sur la masse M .

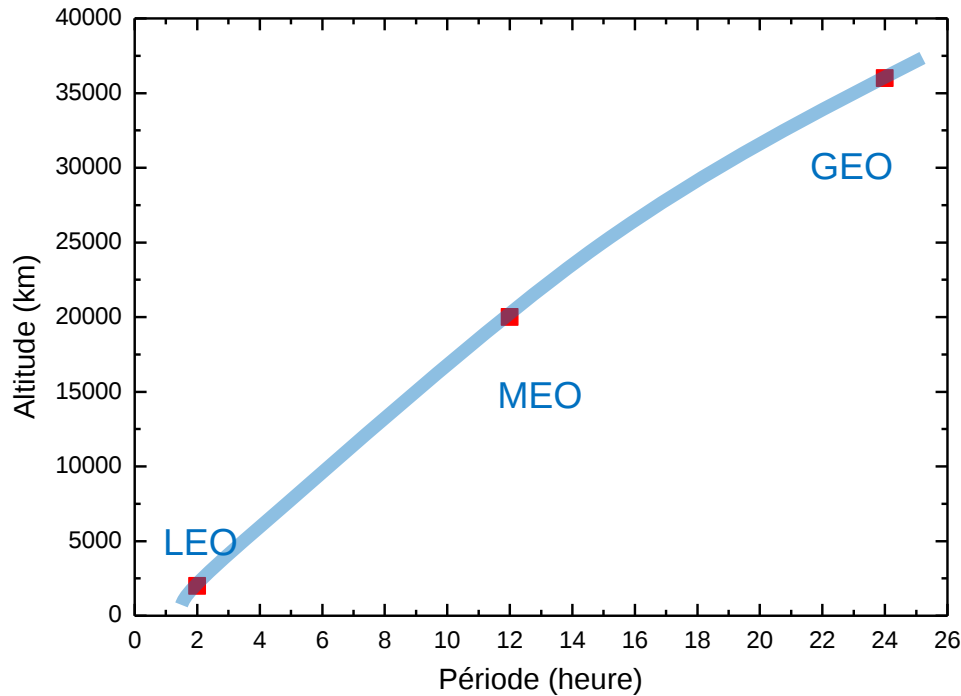
E_1 : un mouvement orbitale est possible avec un rayon constant r_0 . La trajectoire est circulaire.

E_2 ($E_1 < E_2 < 0$) : un mouvement orbitale est possible avec un rayon qui varie entre r_1 et r_2 . La trajectoire est une ellipse.

$E_3 \geq 0$: pas de mise en orbite possible. La trajectoire est une hyperbole. Un objet venant de l'infini s'approche jusqu'à la distance r_{min} puis s'éloigne à nouveau à l'infini.

9.4. Satellites artificiels

■ Principales orbites des satellites



Orbite terrestre basse – LEO

(Low Earth Orbit) : de 160 km à 2000 km. satellites de télécommunications, de détections, stations spatiales

Orbite terrestre moyenne – MEO

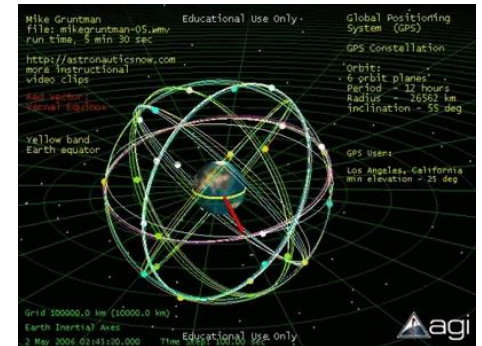
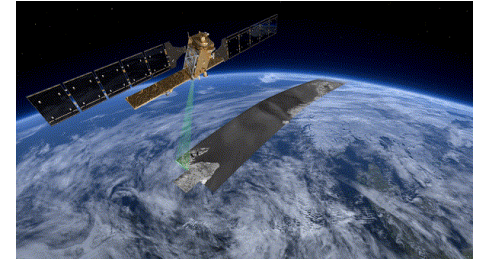
(Medium Earth Orbit) : entre 2000 et 35000 km. Satellites de navigation GPS (20200 km) et Galileo (23222km)

Orbite géostationnaire – GEO

(Geostationary orbit) : 35784 km. Satellites de télécommunications et télévision (Eutelsat). Satellites météorologiques (Meteosat)

$$T(h) = T_0 \left(1 + \frac{h}{R_T} \right)^{3/2} \text{ avec } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}}$$

R_T rayon de la Terre (6371 km)
 M_T masse de la Terre ($5,97 \times 10^{24}$ kg)





9.4. Satellites artificiels

■ Principales orbites des satellites

Exemple : la station spatiale internationale



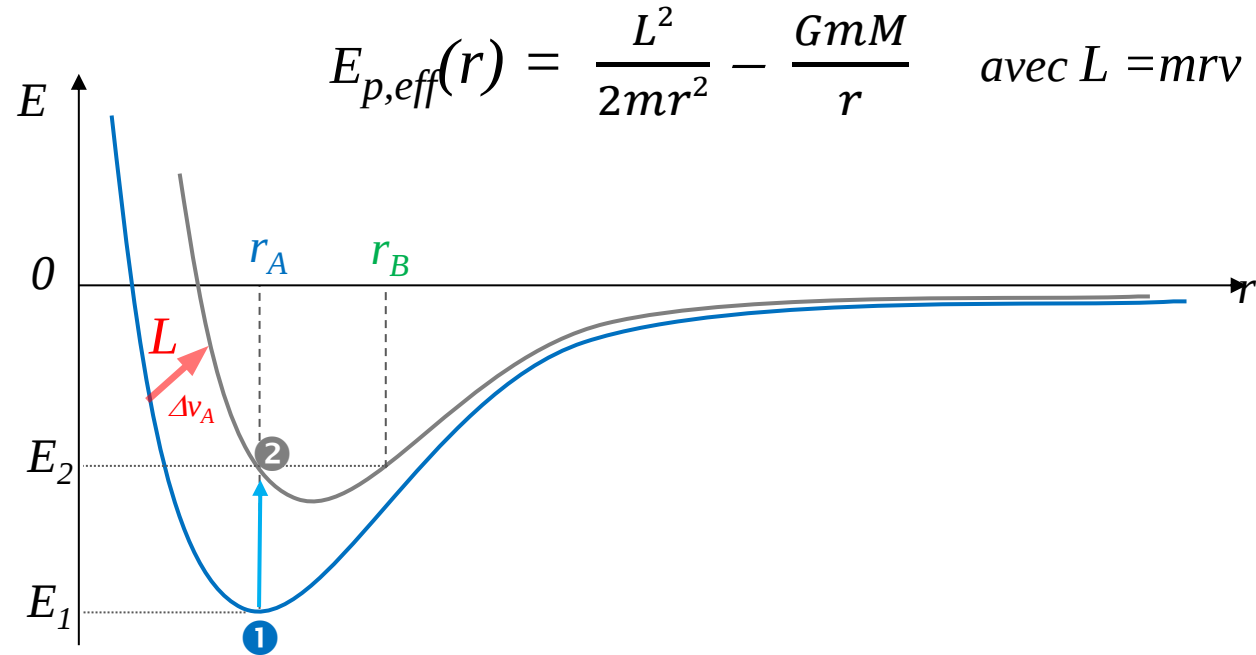
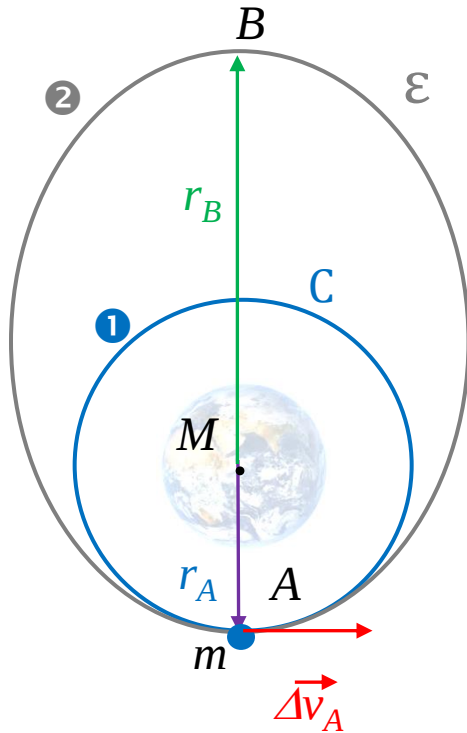
420 tonnes (108 m x 73 m)

Orbite à 415 kilomètres d'altitude, vitesse de 27 600 km/h (7,7 km/s)

9.4. Satellites artificiels



■ Changement d'orbite d'un satellite : de circulaire (C) à elliptique (ϵ)



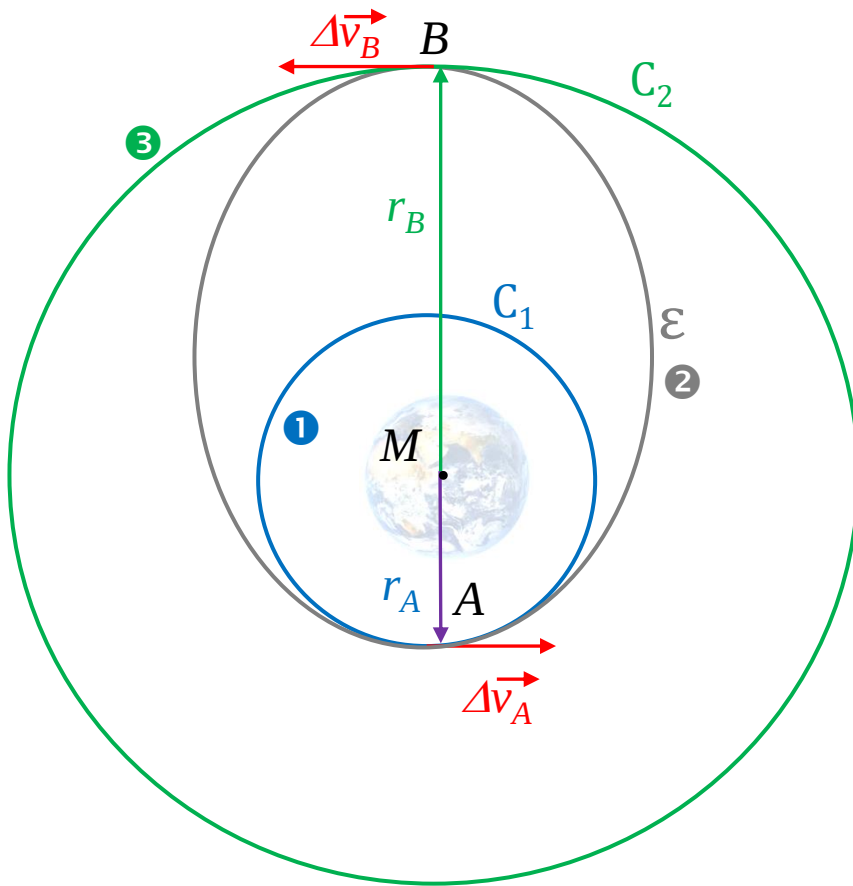
Au point A, on communique au satellite une vitesse additionnelle Δv_A tangente à la vitesse. Le moment cinétique augmente et la courbe de l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}$ se décale (vers le haut et vers la droite). L'énergie mécanique est plus élevée ($E_1 \Rightarrow E_2$).

Sur le diagramme, on passe de la position ① à ②. La trajectoire est elliptique avec un rayon variant entre r_A et r_B .

9.4. Satellites artificiels

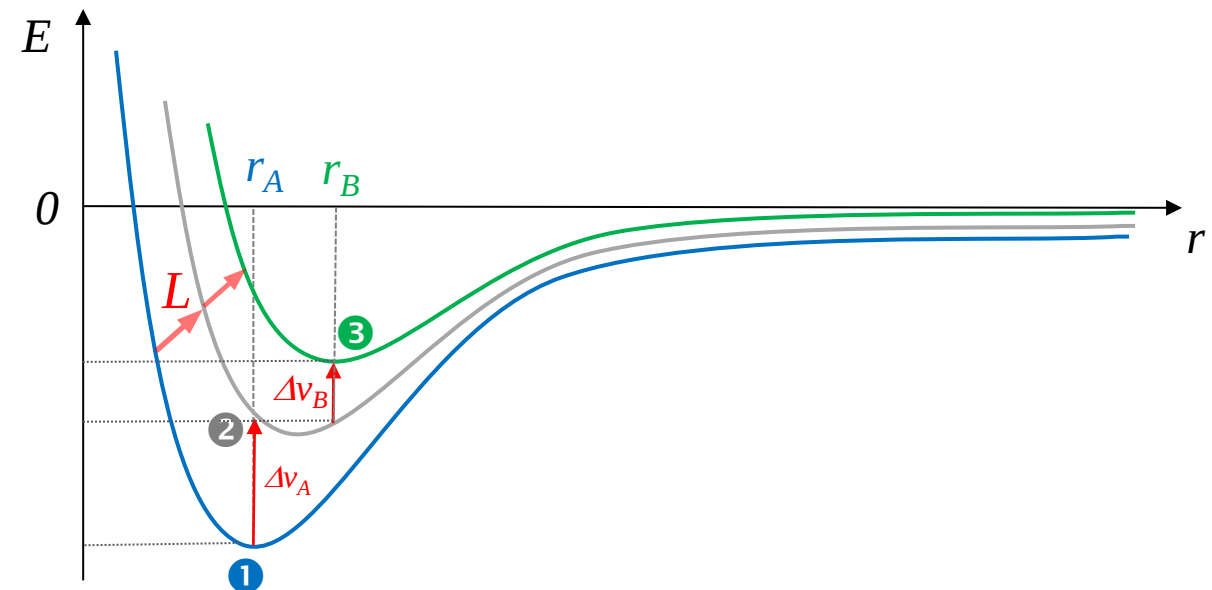


■ Changement d'orbite circulaire : transfert de Hohmann



Le transfert de Hohmann permet de passer d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire. Ces deux orbites sont dans un même plan.

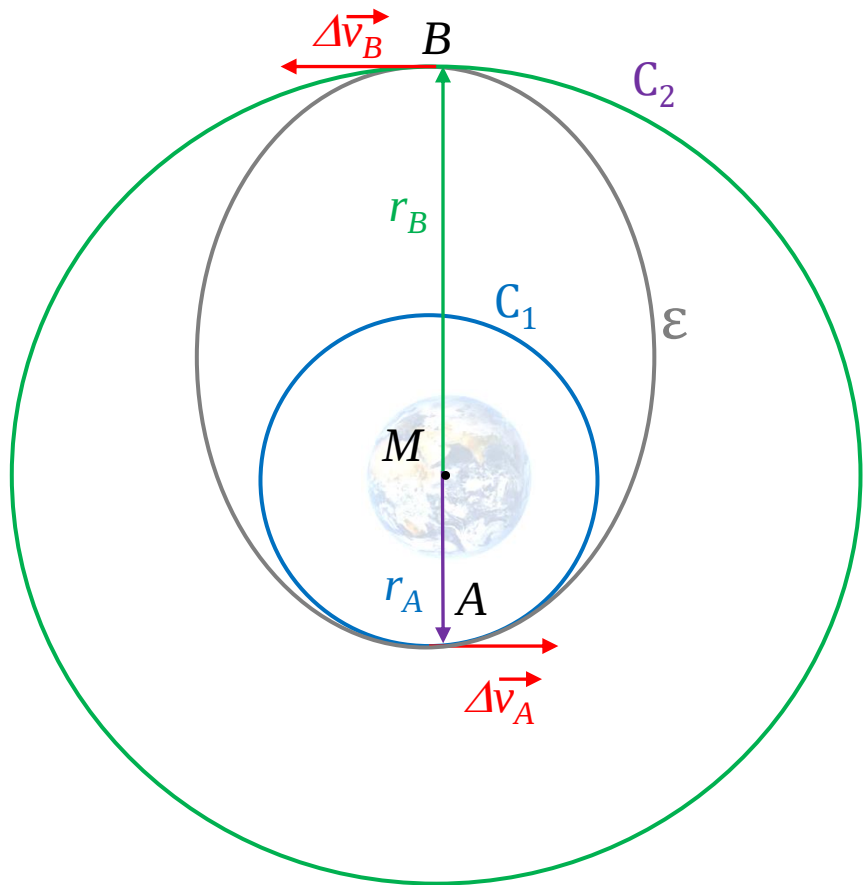
Ce transfert est obtenu en communiquant au satellite au point A une vitesse additionnelle par le biais d'un moteur. Le satellite quitte l'orbite C_1 et suit alors une trajectoire elliptique, appelée « orbite de transfert ». Au point B (*apogée de l'orbite de transfert*), on communique à nouveau une vitesse additionnelle afin d'obtenir la trajectoire circulaire C_2 .



9.4. Satellites artificiels



■ Changement d'orbite circulaire : transfert de Hohmann



Passage de C_1 à ε :

pour calculer la vitesse v_B et le rayon r_B de l'orbite ε on utilise deux conditions de conservation.

(1) *Conservation du moment cinétique*

$$L_A = L_B \Rightarrow m r_A v'_A = m r_B v_B \text{ avec } v'_A = v_A + \Delta v_A$$

(2) *Conservation de l'énergie mécanique*

$$\frac{1}{2} m v'^2_A - G \frac{m M_T}{r_A} = \frac{1}{2} m v_B^2 - G \frac{m M_T}{r_B}$$

Passage de C_1 à ε : on applique la même démarche



9.4. Satellites artificiels

■ Vitesse de libération d'un satellite

Définition : vitesse minimum à fournir à un « objet » de masse m pour qu'il ne soit plus en orbite autour d'une planète ou étoile de masse M (autrement dit, si la vitesse de l'objet est plus grande que la vitesse de libération alors l'objet quitte le champ de gravitation et se retrouve libre dans l'espace avec une vitesse non nulle).

Cela revient à considérer que cet objet atteint un point situé à l'infini avec une vitesse nulle.

- Vitesse nulle à l'infini $\Rightarrow E_c = 0$
- A l'infini, nous avons aussi $E_p = 0$

$\Rightarrow$ l'énergie mécanique ($E_c + E_p$) est donc nulle aussi, c'est-à-dire:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$